Torneo di giochi matematici

Ecco le soluzioni ai quesiti del torneo di giochi matematici del mese di novembre. Solo alle soluzioni complete e motivate è stato assegnato il punteggio massimo di tre punti.

Una copia di questo file si trova anche su internet, sul sito della scuola, all'indirizzo `http://www.fermi.mo.it/~zar/`.

La numerazione degli esercizi parte da 57 perché continua la numerazione usata nel torneo dello scorso anno, i cui testi si possono trovare sempre sul sito della scuola.

Quesito 57. *Determinare tutti gli interi n tali che $n^4 + 4$ sia un numero primo.*

L'espressione $n^4 + 4$ è un numero primo solo per $n = 1$.

Infatti il binomio $n^4 + 4$ può essere scomposto in questo modo:

$$n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - 4n^2 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2).$$

Per ogni numero intero n si ha che n^2+2n+2 è sempre maggiore di 1. Allora, affinché $n^4 + 4$ sia primo, occorre che $n^2 - 2n + 2$ sia uguale a 1.

Impostiamo dunque l'equazione $n^2 - 2n + 2 = 1$: portando 1 a sinistra dell'uguale otteniamo $n^2 - 2n + 1 = 0$, cioè $(n - 1)^2 = 0$, quindi $n = 1$.

Quindi se $n \neq 1$ il numero $n^4 + 4$ certamente non è un numero primo. Se invece $n = 1$ abbiamo $n^4 + 4 = 5$, che effettivamente è un numero primo.

Quesito 58. *Dimostrare che è impossibile costruire un dado in cui ogni faccia sia un poligono con un numero diverso di lati.*

Sia n il numero delle facce del dado. I diversi lati di ogni faccia confinano con facce distinte (non è possibile che un lato confini con due diverse facce, o più), quindi ogni faccia può avere un numero di lati compreso tra 3 e $n - 1$. Allora ci sono almeno due facce con lo stesso numero di lati.

Quesito 59. *Quattro alpinisti devono scalare una montagna: salgono in due alla volta, e ogni volta uno di loro ridiscende per riportare gli attrezzi per la* *scalata ai compagni rimasti in basso. Il tempo impiegato da ogni alpinista per salire in coppia è uguale al tempo che egli stesso impiega per ridiscendere da solo: Alice impiega 2 ore, Bruno ne impiega 1, Carlo ne impega 7 e Dario ne impiega 5. Naturalmente la velocità di salita di una coppia di alpinisti è quella del più lento dei due: se Alice e Bruno salgono insieme, impiegano 2 ore, ma se salgono Alice e Carlo ne impiegano 7. Come possono organizzarsi per riuscire a scalare tutti quanti la montagna nel minor tempo possibile? E quanto tempo impiegano, complessivamente?*

I quattro alpinisti possono trovarsi tutti in cima in 14 ore. Per farcela devono salire prima Alice e Bruno che, muovendosi alla velocità di Alice, impiegano 2 ore; poi scende Alice, che impiega altre 2 ore; quindi, alla velocità di Carlo, salgono quest'ultimo e Dario in 7 ore e scende Bruno in un'ora. L'ultima salita è effettuata da Alice e Bruno che, come prima, ci mettono 2 ore. In totale le ore sono $2 + 2 + 7 + 1 + 2 = 14$.

Quesito 60. *Alice e Bruno hanno organizzato un simpatico gioco: hanno preso una bambola, che rappresenta la loro professoressa di matematica, e la hanno messa sul bordo di un tavolo, che rappresenta il bordo di uno strapiombo. Dietro la prof, un'infinita distesa di terra; davanti a lei, un destino ineluttabile. I passi della prof sono tutti della stessa lunghezza, in avanti (verso il vuoto) o all'indietro (verso la salvezza). Viene lanciata una moneta: se esce testa la prof fa un passo avanti, se esce croce un passo indietro. Se sopravvive al primo lancio, ne viene fatto un altro, poi un altro ancora, e così via. Si spera che, dopo un infinito numero di lanci, la prof riesca a allontanarsi dallo strapiombo evitando quindi di cadere. Quali sono le sue probabilità di sopravvivenza?*

Purtroppo la prof cadrà con certezza! Numeriamo i passi che possono essere fatti (tutti della stessa lunghezza) con i numeri naturali. La posizione 1 corrisponde alla posizione iniziale, sul bordo dello strapiombo. La posizione 2 corrisponde a un passo indietro, la 3 a due passi indietro, e così via. La posizione 0 corrisponde invece a un passo nel vuoto, e alla inevitabile caduta.

Sia $p = P(1 \to 0)$ la probabilità che la prof, trovandosi in posizione 1, arrivi *prima o poi* a mettere i piedi nella posizione 0. In generale, definiamo $P(i \to j)$ la probabilità analoga che la prof si trovi in posizione i e prima o poi arrivi in j.

Per come è posto il problema, abbiamo che $P(2 \to 1) = P(1 \to 0)$, basta spostare il punto di partenza a sinistra di una posizione. In generale:

$$P(i \to (i-1)) = P(1 \to 0) = p$$

per ogni numero naturale i.

Ora cerchiamo di calcolare il valore di $p = P(1 \to 0)$. Immaginiamo che la prof si trovi in posizione 1 (come all'inizio del gioco). C'è un 50% di probabilità che la prof faccia un passo avanti e cada, e un altro 50% di probabilità che invece faccia un passo indietro. In quest'ultimo caso, per cadere dovrà passare dalla posizione 2 alla posizione 0 in un certo numero di passi. Ma per passare da 2 a 0 dovrà prima passare da 2 a 1, e poi da 1 a 0. Queste osservazioni ci portano alle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
p &= P(1 \to 0) \\
&= P(\text{passo avanti}) + P(\text{passo indietro e in seguito raggiungo } 0) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} P(2 \to 0) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} P(2 \to 1 \text{ e } 1 \to 0) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} P(2 \to 1) P(1 \to 0) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} p^2.
\end{aligned}$$

Allora, eliminando il denominatore 2, si ottiene l'equazione $p^2 - 2p + 1 = 0$, che si può scrivere $(p-1)^2 = 0$, e quindi $p = 1$.

Dunque si può affermare che, con certezza, la prof cadrà nel burrone.