Torneo di giochi matematici

Questi sono tutti i testi, con le relative soluzioni, dei quesiti del torneo di giochi matematici che si è svolto durante l'anno scolastico 2004–2005.

Una copia di questo file si trova anche su internet, sul sito della scuola, all'indirizzo `http://www.fermi.mo.it/~zar/`. Allo stesso indirizzo si possono anche trovare le classifiche finali (quella generale, quella del biennio e quella del triennio).

Quesito 35. *Diciamo che un numero naturale è* equilibrato *se si scrive con tante cifre quanti sono i suoi divisori primi distinti (per esempio, 15 è equilibrato, perché si scrive con 2 cifre, e possiede solo 2 divisori primi distinti, che sono 3 e 5; invece 49 non è equilibrato, perché possiede un solo divisore primo, 7).*

Dimostrare che esiste solo un numero finito di numeri equilibrati

Si può dimostrare che non esistono numeri equilibrati composti da c cifre, se $c > 100$.

Se N è un numero equilibrato, composto da c cifre, allora deve essere $N < 10^c$. Ma un numero equilibrato con c cifre (con $c > 100$), se esistesse, sarebbe composto da c numeri primi, ma i numeri primi minori di 100 sono solo 24, e quindi più della metà dei fattori primi di c sarebbero maggiori di 100. Allora il numero sarebbe maggiore di $100^{c/2} = 10^c$, il che è assurdo.

In effetti, il più grande numero equilibrato ha esattamente 10 cifre, ed è uguale a

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 = 6469693230.$$

Quesito 36. *I numeri 1, 2, 3 e 4 vengono estratti da un'urna in un ordine qualsiasi. Qual è la probabilità che i primi 3 numeri estratti siano in ordine crescente?*

La probabilità è 1/6. Infatti, indipendentemente dall'ultimo numero estratto, la probabilità che i primi tre numeri compaiano in ordine crescente è uguale alla probabilità che il più piccolo tra essi venga estratto per primo (uguale a 1/3), moltiplicata per la probabilità che il più piccolo fra gli altri due venga estratto per secondo (uguale a 1/2).

Quesito 37. *Una partita di angurie del peso iniziale di 500 chilogrammi viene stoccata per una settimana in un magazzino. All'inizio la percentuale di acqua contenuta nelle angurie è il 99% del loro peso. Alla fine dello stoccaggio, a causa dell'evaporazione, tale percentuale è scesa al 98%. Quanto pesano alla fine le angurie?*

Le angurie pesano 250 chilogrammi. Infatti la componente non acquosa della angurie costituisce, all'inizio, l'1% del peso totale, e dunque è di 5 chilogrammi. Alla fine dello stoccaggio questi 5 chilogrammi rappresentano il 2% del peso totale, che è quindi di $\frac{5 \cdot 100}{2} = 250$ chilogrammi.

Quesito 38. *Quante sono le quaterne di numeri interi non negativi x_1, x_2, x_3 e x_4 soluzioni dell'equazione*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

Le soluzioni sono 120. Ad ogni soluzione (x_1, x_2, x_3, x_4) associamo una stringa composta da cerchi e asterischi nel modo seguente: x_1 asterischi, seguiti da un cerchio, seguito da x_2 asterischi, un altro cerchio, x_3 asterischi, un ultimo cerchio, e infine x_4 asterischi.

Per esempio, alla soluzione $(1, 3, 2, 1)$ è associata la stringa

$$\underbrace{*}_{x_1} \circ \underbrace{***}_{x_2} \circ \underbrace{**}_{x_3} \circ \underbrace{*}_{x_4}.$$

Viceversa, ogni stringa di 3 cerchi e 7 asterischi individua una quaterna soluzione. Per esempio, la stringa

$$\circ **** \circ * \circ **$$

corrisponde alla soluzione $(0, 4, 1, 2)$. Dunque l'insieme delle quaterne cercato è uguale all'insieme delle permutazioni di 10 oggetti, di cui 3 uguali tra loro e altri 7 uguali tra loro e distinti dai precedenti. Ne segue che il numero cercato è

$$\frac{10!}{3!7!} = 120.$$

Quesito 39. *Dati due numeri positivi a e b, la loro media aritmetica è $\frac{a+b}{2}$ mentre la loro media geometrica è $\sqrt{ab}$. Qual è la più grande?*

Se $a = b$ le due medie sono uguali, altrimenti è maggiore la media aritmetica. Infatti la disuguaglianza

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

è equivalente a

$$a + b - 2\sqrt{ab} > 0,$$

che a sua volta è equivalente a

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0.$$

Quesito 40. *Dato un n-agono regolare, con $n > 4$ (pentagono, esagono, eccetera), dimostrare che non è mai inscrivibile in un'ellisse.*

Un n-agono regolare è sempre inscrivibile in una circonferenza, quindi i suoi vertici si trovano sulla circonferenza. Ma una circonferenza interseca un'ellisse in un massimo di quattro punti, quindi se n è maggiore di quattro non è possibile inscrivere l'n-agono nella circonferenza.

Quesito 41. *Un pendolare arriva alla stazione vicino a casa sua tutte le sere alle 17:00. La moglie parte da casa in macchina tutte le sere alla stessa ora e arriva alla stazione giusto in tempo per prendere il marito e portarlo a casa.*

Una sera, il pendolare prende il treno prima e arriva alla stazione alle 16:00. Il tempo è bello, quindi si avvia a piedi lungo la strada percorsa sempre dalla moglie. Quando si incontrano, sale in macchina e arrivano a casa dieci minuti prima del solito.

Supponendo che la moglie guidi a velocità costante, che la sera in oggetto sia partita alla stessa ora, che guidi alla stessa velocità delle altre volte e che anche il marito cammini a velocità costante, per quanto tempo ha camminato il marito?

Siccome arrivano a casa 10 minuti prima del solito, 10 minuti deve essere il risparmio di tempo della moglie sia all'andata che al ritorno. Quindi all'andata la moglie ha risparmiato 5 minuti, di conseguenza la moglie ha incontrato il marito 5 minuti prima del solito.

Allora deve averlo incontrato alle 16:55 anziché alle 17:00. Quindi, dato che il marito è arrivato alle 16:00, ha camminato per 55 minuti.

Quesito 42. *Un verme si trova a un capo di un elastico lungo 1 metro: l'unico scopo della vita di questo verme è arrivare all'altra estremità dell'elastico.*

Il verme si muove con una velocità di 1 centimetro all'ora. Se le cose stessero soltanto così il verme impiegherebbe 100 ore ad arrivare all'altra estremità dell'elastico; invece all'altra estremità l'aspetta un diavoletto dispettoso che ogni ora allunga l'elastico di 1 metro. Riuscirà il verme a raggiungere il diavoletto?

Diciamo che all'inizio dell'ora i-esima la distanza percorsa dal verme sia d_i; l'elastico sarà lungo $100i$ (quindi all'inizio della prima ora, cioè per $i = 1$, l'elastico è lungo 100 e il verme si trova in $d_1 = 0$.

All'inizio dell'ora $(i+1)$-esima il verme ha fatto un passo di 1 centimetro, e quindi si troverebbe in $d_i + 1$ se l'elastico non venisse allungato. Per calcolare quindi la posizione reale del verme si può scrivere la seguente proporzione: $d_{i+1} : d_i + 1 = 100(i + 1) : 100i$, da cui si ricava che

$$d_{i+1} = (d_i + 1)\frac{100(i + 1)}{100i}.$$

Scrivendo il risultato in termini di frazione di elastico percorso, otteniamo

$$\frac{d_{i+1}}{100(i + 1)} = \frac{d_i}{100i} + \frac{1}{100i}.$$

Dunque all'inizio della seconda ora la frazione di elastico percorso era

$$\frac{d_2}{100 \cdot 2} = \frac{d_1}{100} + \frac{1}{100},$$

all'inizio della terza ora la frazione di elastico diventa

$$\frac{d_3}{100 \cdot 3} = \frac{d_2}{100 \cdot 2} + \frac{1}{100 \cdot 2} = \frac{d_1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100 \cdot 2}.$$

Quindi dopo ogni ora si aggiunge un termine pari a $1/i$, e il nostro scopo è vedere se al crescere di i la somma

$$\frac{1}{100}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{i}\right)$$

supera il valore 1. Questo è vero, perché la somma tra parentesi, quando i tende ad infinito, è la serie armonica che è divergente (anche se è molto lenta). E quindi quella somma supererà qualunque numero. In realtà la serie diverge così lentamente che la somma indicata supererà il valore 1 dopo circa $1.509 \cdot 10^{43}$ termini!

Quesito 43. *Un artista usa due matite, una con la mina dura e un'altra con la mina tenera. Prima che inizi il disegno le matite hanno la stessa lunghezza. Quando l'artista finisce il disegno la matita con la mina tenera è lunga un centimetro in più della metà della matita con la mina dura. Le matite si sono accorciate complessivamente di una lunghezza pari a quella attuale della matita con la mina tenera (cioè la somma degli "accorciamenti" della matita tenera e della matita dura è uguale alla lunghezza attuale della matita tenera). Quanti centimetri di matita dura ha consumato l'artista?*

Un centimetro. Indichiamo con ℓ la lunghezza delle matite all'inizio del disegno, con ℓ'_D la lunghezza finale della matita dura, con ℓ'_T la lunghezza finale della matita tenera, e con x la lunghezza della mina dura consumata, dove $x = \ell - \ell'_D$. Si possono allora scrivere le tre equazioni seguenti:

$$\begin{cases} \ell'_T = \frac{\ell'_D}{2} + 1 \\ \ell = \ell'_D + x \\ (\ell - \ell'_D) + (\ell - \ell'_T) = \ell'_T \end{cases}$$

Sostituendo le prime due equazioni nella terza si ottiene

$$\ell'_D + x - \ell'_D + \ell'_D + x - \frac{\ell'_D}{2} - 1 = \frac{\ell'_D}{2} + 1,$$

da cui si ricava $2x - 1 = 1$, perciò $x = 1$: la matita dura si è accorciata di un centimetro.

Quesito 44. *Dimostrare che* $111^{111} - 1$ *è divisibile per* 10.

Il numero 111^{111} può essere scritto come $(110+1)^{111}$, e sviluppato secondo la formula del binomio di Newton, utilizzando il triangolo di Tartaglia. Non è però necessario sviluppare completamente il binomio (sarebbe lunghissimo), ma basta trovare gli ultimi due termini. L'ultimo è certamente 1, mentre per il penultimo bisogna pensare a come è costruito il triangolo di Tartaglia.

Il primo numero (uguale all'ultimo, perché il triangolo è simmetrico) è sempre uguale a 1; il secondo (e quindi il penultimo) è sempre uguale alla potenza n del binomio, in questo caso 111. Quindi il penultimo termine dello sviluppo del binomio è $111 \cdot 110$. Dunque abbiamo che

$$111^{111} = (110 + 1)^{111} = 110^{111} + 111 \cdot 110^{110} + \ldots 111 \cdot 110 + 1 - 1.$$

Tutte le potenze presenti nello sviluppo sono multipli di 10, e le due cifre 1 alla fine si semplificano, e dunque il risultato finale è certamente divisibile per 10.

Quesito 45. *Andando a passeggio vi accorgete di essere entrati in una regione strana, e precisamente in uno spazio a un numero di dimensioni maggiore di quello a cui siete abituati (cioé tre, per chi non lo sapesse). Nessuno vuol dirvi quale sia il numero n delle dimensioni di quello spazio; uno però vi fornisce un'indicazione che, a pensarci, può permettervi di trovare la risposta. Egli dice: "per raddoppiare il volume di un solido—(iper)cubo, (iper)sfera o altra forma qualsiasi—dobbiamo aumentare le misure di lunghezza (lato, raggio, eccetera) del 10% circa". Qual è il numero di dimensioni di quello spazio?*

Lo spazio è a 7 dimensioni. Fissata l'unità di misura delle lunghezze si ha che l'unità di misura delle aree è il quadrato del lato unitario, quello dei volumi è il cubo del lato unitario, quello degli ipervolumi di dimensione $n > 3$ sarà la potenza n-esima del lato unitario.

Seguendo l'enunciato del problema, aumentando del 10% circa (noi eseguiremo i calcoli col 10%) il lato di un ipercubo di uno spazio di dimensione incognita se ne raddoppia l'ipervolume. Ossia è incognito n nell'equazione

$$(l + 0.1 \cdot l)^n = 2 \cdot l^n,$$

da cui $(1 + 0.1)^n = 2$. Osservato che $(1.1)^1 = 1.1$, $(1.1)^2 = 1.21$, $(1.1)^3 = 1.331$, $(1.1)^4 = 1.4641$, $(1.1)^5 = 1.61051$, $(1.1)^6 = 1.771561$, $(1.1)^7 = 1.9487171$, $(1.1)^8 = 2.14358881$, abbiamo che la soluzione intera pari a circa il 10% è $n = 7$ (perché è per $n = 7$ che si ottiene il valore più prossimo a 2).

Quesito 46. *Quanti sono i numeri di nove cifre, una volta cancellati quelli con la stessa cifra ripetuta tre o più volte consecutivamente?*

I numeri sono 843160671. Si può arrivare al risultato utilizzando la "forza bruta", scrivendo un programma che conta tutti i numeri. Non allego il sorgente perché il programma è molto semplice: anche senza ottimizzazioni, facendo nove cicli annidati per le nove cifre, in un paio di minuti (a seconda della potenza del computer a disposizione, anche in meno tempo) si trova subito il risultato.

Altrimenti si può ragionare nel modo seguente. Chiamiamo "tripli" i numeri in cui una cifra si ripete tre o più volte, e indichiamo con $f(n)$ il numero di numeri di n cifre tripli. Ad esempio, $f(1) = f(2) = 0$, perché non ci sono abbastanza cifre, e $f(3) = 9$, perché ci sono 9 numeri di tre cifre con tutte e tre le cifre uguali.

Prendiamo in esame un caso più complicato, per esempio $n = 7$, e scriviamo il generico numero in questo modo: $abcdefX$. Esso è triplo se è triplo $abcdef$ oppure se $e = f = X$. Attenzione, però: nel secondo caso, per non contare più volte lo stesso numero, occorre che $abcd$ non sia triplo, e che $d \neq X$.

Allora, ogni $abcdef$ triplo genera 10 tripli del tipo $abcdefX$, quindi abbiamo $10f(6)$ tripli. Ogni $abcd$ non triplo (ce ne sono $9000 - f(4)$) genera 9 tripli del tipo $abcdxxx$, con $d \neq x$, quindi abbiamo altri $9(9000 - f(4))$ tripli. In totale i tripli di 7 cifre sono $f(7) = 10f(6) + 9(9000 - f(4))$ tripli.

La formula generale sarà quindi la seguente:

$$f(n+3) = 10f(n+2) + 9(9 \cdot 10^{n-1} - f(n)).$$

Otteniamo allora i seguenti valori:

$$\begin{aligned}
f(1) &= 0 \\
f(2) &= 0 \\
f(3) &= 9 \\
f(4) &= 171 \\
f(5) &= 2520 \\
f(6) &= 33219 \\
f(7) &= 411651 \\
f(8) &= 4903830 \\
f(9) &= 56839329,
\end{aligned}$$

e, sottraendo $f(9)$ da 900000000 (il numero di numeri di nove cifre) otteniamo proprio 843160671.

Quesito 47. *Tre amici hanno comprato tre libri di matematica ciascuno, spendendo cento euro a testa. Ogni libro è stato scelto una volta, tranne uno che è stato scelto tre volte. Quale tra i nove libri, che hanno il seguente costo, è stato scelto tre volte?*

- *libro 1: costo 11 euro,*
- *libro 2: costo 19 euro,*
- *libro 3: costo 22 euro,*
- *libro 4: costo 28 euro,*
- *libro 5: costo 50 euro,*
- *libro 6: costo 59 euro,*
- *libro 7: costo 67 euro.*

È stato scelto tre volte il terzo libro.

Indichiamo con x_i il costo del libro i-esimo (con $i = 1, \ldots, 7$) e con x il costo del libro scelto tre volte. L'equazione risolutiva del problema è la seguente:

$$2x + \sum_{i=1}^{7} x_i = 300,$$

da cui si ricava x:

$$x = \frac{300 - \sum_{i=1}^{7} x_i}{2} = \frac{300 - (11 + 19 + 22 + 28 + 50 + 59 + 67)}{2} = 22.$$

Dunque il libro scelto tre volte è quello che costa 22 euro, cioè il terzo.

Quesito 48. *Cinque uomini ed una scimmia fecero naufragio su un'isola deserta e passarono il primo giorno a raccogliere noci di cocco per cibo. Poi lo ammucchiarono tutto insieme e andarono a dormire.*

Ma mentre tutti dormivano uno di essi si svegliò e, pensando che il mattino dopo vi sarebbero stati dei litigi per la spartizione, decise di prendersi la sua parte. Perciò divise le noci in cinque mucchi. Rimaneva una noce, che egli diede alla scimmia, poi nascose la sua parte e mise tutto il resto assieme.

Subito dopo un secondo uomo si svegliò e fece la stessa cosa. Anch'egli diede una noce residua alla scimmia. Uno dopo l'altro tutti e cinque gli uomini fecero la stessa cosa, ognuno prendendo un quinto del mucchio che trovava svegliandosi e dando una noce alla scimmia. Alla mattina essi divisero le noci rimaste ed ognuno ottenne lo stesso numero (e anche la scimmia ottenne una noce). Naturalmente ognuno sapeva che mancavano delle noci, ma ognuno era colpevole come gli altri e così nessuno parlò. Quante noci c'erano all'inizio?

Questo è un problema classico e famoso (e difficile). La risposta è 15621.

Indicando con N il numero iniziale di noci di cocco, con A, B, C, D, E il numero di noci prese durante la notte da ciascun naufrago, e con F il numero ricevuto da ognuno nella divisione finale, il problema è risolto dal seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} N = 5A + 1 \\ 4A = 5B + 1 \\ 4B = 5C + 1 \\ 4C = 5D + 1 \\ 4D = 5E + 1 \\ 4E = 5F + 1 \end{cases}$$

Ricavando E dall'ultima equazione e sostituendolo nella penultima, ricavando poi D dalla penultima e sostituendolo nella precedente, e così via, si arriva alla seguente equazione in due incognite:

$$1024N = 15625F + 11529.$$

Esiste un metodo standard per risolvere questo tipo di equazioni (che si chiamano equazioni diofantine o diofantee), ma è un po' complicato. Grazie all'aiuto del computer oggi si può arrivare alla soluzione anche per tentativi, arrivando a trovare il più piccolo valore di N per cui l'equazione ha per soluzione due numeri naturali, e cioè $N = 15621$ (risulta poi che $F = 1023$).

Ma esiste un'altro metodo molto più ingegnoso per arrivare alla soluzione, senza dover usare il computer: è un metodo che comporta il concetto di noci *negative*.

Dato che N viene diviso sei volte in cinque mucchi, è chiaro che 5^6 (cioè 15625) deve essere aggiunto a qualsiasi risposta per avere la successiva risposta di ordine superiore. Infatti alla soluzione si può aggiungere o sottrarre qualsiasi multiplo di 5^6. Sottrarre dei multipli di 5^6 naturalmente porterebbe ad un numero infinito di risposte con numeri negativi che soddisferebbero l'equazione originale, ma non il problema.

Non esiste un valore positivo "piccolo" di N che soddisfa all'equazione, ma esiste una risposta semplice con valori negativi. Con un po' di tentativi si scopre essa è -4.

Vediamo come risponde perfettamente alle condizioni del problema. Il primo marinaio si avvicina alla pila di -4 noci, dà una noce positiva alla scimmia (non importa se alla scimmia la noce viene data prima o dopo la divisione per cinque) e rimangono cinque noci negative che vengono divise in cinque mucchi, ognuno di una noce negativa. Dopo aver nascosto un mucchio, rimangono quattro noci negative, esattamente il numero iniziale. Gli altri marinai eseguono lo stesso rituale e l'intero procedimento termina con ogni marinaio in possesso di due noci negative, mentre la scimmia conclude con sei noci positive. Per trovare la risposta costituita dal più piccolo intero positivo, basta solo aggiungere 15625 a -4, ottenendo 15621, la soluzione cercata.

Per capire meglio il concetto di noce negativa si può anche ragionare nel modo seguente: cominciamo con 5^6 noci, questo è il più piccolo numero divisibile esattamente in quinti e che consente di ripetere l'operazione sei volte togliendo ogni volta un quinto senza lasciare noci residue per la scimmia. Quattro noci delle 5^6 vengono ora tinte di nero e messe da parte. Quando le rimanenti vengono divise per cinque ne rimane una che viene data alla scimmia. Dopo che il primo marinaio ha preso la sua parte e la scimmia ha avuto la sua noce, rimettiamo di nuovo le quattro noci nere con le altre in modo da averne un mucchio di 5^5, evidentemente divisibile esattamente per 5. Però prima di fare la successiva divisione mettiamo di nuovo da parte le quattro noci nere in modo che dalla divisione rimanga una noce da dare alla scimmia.

Questo procedimento—di prendere in prestito le noci nere solo quanto basta per vedere che si può effettuare una divisione per cinque e poi metterle da parte—viene ripetuto ad ogni divisione. Dopo la sesta ed ultima divisione, le noci nere rimangono da parte e non sono di nessuno. Esse non hanno una parte essenziale nell'operazione, ma servono solo a rendere le cose più chiare nel procedere.

Quesito 49. *Un contadino ha speso 100 euro per comprare 100 animali di tre tipi differenti: Ogni mucca costa 10 euro, ogni maiale 3 e ogni pecora 50 centesimi (il contadino è andato da un amico che gli ha fatto degli ottimi prezzi). Sapendo che egli ha comprato almeno una mucca, un maiale e una pecora, quanti animali per ogni tipo ha comprato?*

Se x è il numero di mucche, y il numero di maiali e z il numero di pecore, possiamo scrivere le due equazioni

$$\begin{cases} 10x + 3y + z/2 = 100 \\ x + y + z = 100. \end{cases}$$

Moltiplicando la prima equazione per 2 (per togliere la frazione) e sottraendo la seconda per eliminare z, si ottiene $19x + 5y = 100$.

Ora ricaviamo y in questo modo:

$$y = \frac{100 - 19x}{5} = 20 - \frac{19}{5}x = 20 - 3x - \frac{4}{5}x.$$

Osservando il risultato, notiamo che x deve avere un valore tale per cui $4x/5$ sia un numero intero (le bestie sono state tutte acquistate intere e vive). Il più piccolo valore è $x = 5$, che sostituito nell'equazione fornisce il risultato $y = 1$. Sostituendo all'indietro in una delle due equazioni inziali si ottiene $z = 94$. Dunque abbiamo trovato una soluzione: cinque mucche, un maiale, novantaquattro pecore.

Ci sono altre soluzioni? Il prossimo valore di x che possiamo provare ad usare è $x = 10$, ma in questo modo y diventa negativo, e questo non è accettabile. A maggior ragione aumentando il valore di x si ha che y rimane negativo. Quindi quella trovata è l'unica soluzione possibile.

Quesito 50. *Quando ancora non esisteva il personal computer, una segretaria, ansiosa di provare la sua nuova macchina da scrivere, formula una* *frase di lunghezza minore di una riga e comincia a scriverla su un foglio, partendo dal margine superiore sinistro. Scrive la frase sempre allo stesso modo, con un punto finale seguito da due spazi vuoti successivi. Le parole in fine di riga non vengono sillabate e ogni volta che una parola sta per uscire dal margine destro (compreso ogni eventuale segno di interpunzione) si va a capo, continuando a scrivere nella riga successiva. Il testo completo, di 50 righe, risulta così allineato a sinistra ma non a destra.*

È vero che sul foglio si trova una colonna di spazi bianchi perfettamente allineati?

Sì: supponiamo che la frase sia composta da n caratteri, incluso il primo spazio dopo il punto finale. Questa stringa di n caratteri viene scritta ogni volta su ogni riga, sebbene la parola iniziale non sia sempre la stessa. In pratica su ogni riga viene scritta una permutazione della frase iniziale. Allora sicuramente dopo n caratteri ci sarà sempre uno spazio bianco. Ecco un esempio con una frase di 26 caratteri e un margine di 50: il ventisettesimo carattere è sempre uno spazio.

```
Un triangolo ha tre lati.  Un triangolo ha tre
lati.  Un triangolo ha tre lati.  Un triangolo ha
tre lati.  Un triangolo ha tre lati.  Un
triangolo ha tre lati.  Un triangolo ha tre lati.
Un triangolo ha tre lati.  Un triangolo ha tre
lati.  Un triangolo ha tre lati.  Un triangolo ha
tre lati.  Un triangolo ha tre lati.  Un
triangolo ha tre lati.
```

Quesito 51. *Un mazzo di 52 carte da gioco viene mescolato e piazzato a faccia in giù sul tavolo, poi viene girata una carta alla volta dalla cima del mazzo. Vi viene chiesto di scommettere sulla distanza dalla cima del mazzo del primo asso di colore nero. Su quale posizione puntereste, in modo da massimizzare la probabilità di azzeccarci nel caso in cui il gioco venisse ripetuto molte volte?*

Contrariamente a ciò che si può intuire, la scommessa più favorevole è sulla prima carta estratta. Questo si può capire pensando prima a un caso molto semplice, cioè a un mazzo composto solo da tre carte: un re e due assi. Ci sono tre modi di mescolarlo: `AAK`, `AKA`, `KAA`. Si vede subito che due volte su tre la prima carta è un asso, una sola volta su tre invece è un re.

Ora proviamo a generalizzare a un mazzo di 52 carte. I casi in cui si ha un asso in prima posizione si possono contare nel modo seguente. È possibile che un asso sia in prima posizione e l'altro asso in seconda, oppure un asso in prima e l'altro in terza, oppure ancora un asso in prima e l'altro in quarta, e così via fino ad arrivare a un asso in prima e l'altro in ultima. Ci sono quindi 51 di questi casi. Ognuno di questi casi poi va contato due volte, perché i due assi neri possono scambiarsi di posto. Poi ognuno di questi $2 \cdot 51$ casi va contato ancora per un numero di volte pari alle permutazioni delle altre 50 carte (che possono presentarsi in tanti modi diversi). In sostanza abbiamo quindi $2 \cdot 51 \cdot 50!$ casi favorevoli.

I casi possibili sono le possibili permutazioni di 52 carte, cioè 52!, e la probabilità che ci sia un asso in prima posizione è quindi:

$$\frac{2 \cdot 51 \cdot 50!}{52!} = \frac{51}{1326}.$$

Non ho semplificato ulteriormente la frazione perché è utile tenere quel 51 al numeratore.

Infatti, se ora calcoliamo allo stesso modo la probabilità che ci sia un asso in seconda posizione (e non in prima), il ragionamento è analogo a quello di prima, ma i casi sono un po' meno: è possibile che ci sia un asso in seconda posizione e l'altro in terza, un asso in seconda e l'altro in quarta, un asso in seconda e l'altro in quinta, e così via fino a un asso in seconda e l'altro in ultima. Dunque c'è un caso in meno, e il calcolo finale della probabilità di avere un asso in seconda posizione ci dà la frazione 50/1326.

Analogamente, la probabilità che ci sia un asso in terza posizione (e non in prima e in seconda) è di 49/1326, che l'asso sia in quarta posizione è di 48/1326, e che sia la cinquantunesima carta è di 1/1326 (il primo asso nero non può naturalmente essere la cinquantaduesima carta).

Quindi la probabilità più favorevole è la prima.

Quesito 52. *Immaginiamo di scrivere in lettere tutti i numeri primi ("due", "tre", "cinque", eccetera), e poi di ordinarli alfabeticamente. Qual è il primo numero primo di questa lista? (Supponiamo di non usare termini come "bilione", "trilione" e così via, che sono un po' ambigui perché vengono usati con significati diversi negli Stati Uniti e in Europa)*

In questo quesito c'è poco da dimostrare: occorre cercare, per tentativi oppure utilizzando qualche programma per computer, i numeri primi che incominciano con le prime lettere dell'alfabeto. Si trova che il primo è centocinquantacinquemilacentocinquantatre: 155153.

Quesito 53. *Siete a capo di una piccola nazione divenuta da poco tempo indipendente. Avete il compito di fissare un sistema monetario basato sul centesimo come unità minima. Il vostro obiettivo è di coniare il minor numero di monete differenti che consentano di formare qualsiasi valore da 1 a 100 (inclusi) con non più di due monete.*

Per esempio, si raggiunge facilmente l'obiettivo con 18 monete dei seguenti valori: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90. Sapete fare di meglio? Ogni valore deve essere ottenibile o con una moneta o come somma di due monete. Non è necessario che le monete siano diverse.

Ci si può riuscire con 16 monete: 1, 3, 4, 9, 11, 16, 20, 25, 30, 34, 39, 41, 46, 47, 49, 50. Una soluzione con una portata più alta, di 104, è la seguente: 1, 3, 4, 5, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 47, 48, 49, 51, 52.

Quesito 54. *Si ha una bilancia a due piatti, e nove monete, una delle quali è leggermente più pesante delle altre. Stabilire con due sole pesate qual è.*

Siano le monete $ABCDEFGHI$. Si mettano ABC su un piatto e DEF sull'altro. Si hanno tre casi:

1. ABC più pesante: la moneta è tra ABC,
2. ABC più leggera: la moneta è tra DEF,
3. stesso peso: la moneta e' tra GHI.

Si prenda ora il gruppo di tre monete, se ne metta una su ogni piatto e si ragioni allo stesso modo.

Quesito 55. *Trovate quali sono le ultime due cifre di:*

$$9^{8^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}}.$$

Le ultime due cifre sono 21. Per dimostrarlo, iniziamo a ragionare sulla potenza principale, cioè il 9. Ci interessa conoscere il comportamento delle ultime due cifre di tutte le potenze di 9. Facendo un po' di prove si trova che dopo 10 elevamenti a potenza le cifre si ripetono, infatti

$$\begin{array}{ll} 9^0 = 1 & 9^1 = 9 \\ 9^2 = 81 & 9^3 = 729 \\ 9^4 = 6561 & 9^5 = 59049 \\ 9^6 = 531441 & 9^7 = 4782969 \\ 9^8 = 43046721 & 9^9 = 387420489 \\ 9^{10} = 3486784401 & 9^{11} = 31381059609 \end{array}$$

Dunque le ultime due cifre delle potenze di 9 si ripetono con periodo 10. Allora non è necessario calcolare il valore completo dell'esponente di 9, ma ci basta trovare

$$8^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}} \mod 10.$$

Ora concentriamoci sulle potenze di 8: con altre prove si vede che l'ultima cifra di queste si ripete con un periodo di 4 elevamenti a potenza, infatti

$$\begin{array}{ll} 8^0 = 1 & 8^1 = 8 \\ 8^2 = 64 & 8^3 = 512 \\ 8^4 = 4096 & 8^5 = 32768 \end{array}$$

(occorre notare qui che la potenza 0 in generale costituisce una sorta di "antiperiodo", perché è sempre uguale a 1 e poi non è detto che si ripeta—del resto, l'esponente della cifra che stiamo calcolando è certamente diverso da 0).

Allora non ci serve trovare il valore completo dell'esponente di 8, ma ci basta trovare

$$7^{6^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}} \mod 4.$$

Analizzando le potenze di 7 modulo 4, si vede che queste si ripetono dopo 2 elevamenti a potenza, infatti

$$7^3 = 343 = 3 \mod 4 = 7 \mod 4,$$

e quindi è sufficiente analizzare il valore di

$$6^{5^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}} \mod 2.$$

Qua ci possiamo fermare, perché questo valore è certamente 0, infatti calcolare un valore modulo 2 significa semplicemente guardare se questo è pari o dispari, e certamente ogni potenza di 6 è un numero pari. Dunque

$$6^{5^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}} \mod 2 = 0.$$

Allora, sostituendo all'indietro nelle espressioni che precedentemente abbiamo lasciato in sospeso, troviamo che

$$7^{6^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}} \mod 4 = 1$$

quindi

$$8^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}} \mod 10 = 8$$

e infine

$$9^{8^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^1}}}}} \mod 100 = 21.$$

Quesito 56. *Alice vuole spedire un regalo di valore a Bruno. I due amici hanno a disposizione un cofanetto sufficientemente capiente, con due anelle metalliche che possono essere usate per chiuderlo con un lucchetto, e vari lucchetti con le rispettive chiavi. Bruno, però, non ha le chiavi dei lucchetti di Alice (e viceversa Alice non ha le chiavi dei lucchetti di Bruno). Come può fare Alice per spedire il regalo a Bruno in modo tale che solo Bruno possa aprire il cofanetto? Notate che Alice non può spedire la chiave in una scatola aperta, perché potrebbe essere copiata.*

Alice mette l'oggetto che vuole spedire nel cofanetto, e lo chiude con un lucchetto. Poi spedisce il cofanetto a Bruno. Bruno chiude con un secondo lucchetto il cofanetto, e lo rispedisce ad Alice. Ora Alice toglie il suo lucchetto, e rispedisce il cofanetto a Bruno, che finalmente può aprirlo.

Quesito 57. *Trovare un numero di dieci cifre $x_0x_1 \dots x_9$ in cui ogni cifra x_i sia uguale al numero di volte in cui la cifra i compare all'interno del numero. Tanto per capirci, se la richiesta fosse di trovare un numero di cinque cifre con quella proprietà, una soluzione potrebbe essere 21200, perché esso è composto da 2 cifre "zero", 1 cifra "uno", 2 cifre "due", 0 cifre "tre" e 0 cifre "quattro".*

Il numero è 6210001000. La sequenza completa di tutti i numeri con la proprietà richiesta, al variare del numero di cifre da 1 a 10, è la seguente: 1210, 2020, 21200, 3211000, 42101000, 521001000, 6210001000. Con i calcolatori di oggi è facile dimostrarlo utilizzando la forza bruta, cioè analizzando tutti i numeri fino a 9999999999. In passato è stato dimostrato senza l'uso di computer che questi sono gli unici numeri con questa proprietà.